

Numerische Verfahren zur Modellreduktion großer Regelungssysteme

Peter Benner

Arbeitsbereich Mathematik
TU Hamburg-Harburg
p.benner@tu-harburg.de

17. Dezember 2001
RWTH Aachen

Gliederung

- Lineare autonome Regelungssysteme
- Modellreduktionsverfahren
- Balanciertes Abschneiden
- Berechnung der Gram'schen Matrizen
- Numerische Beispiele
- Zusammenfassung und Ausblick

Lineare autonome Regelungssysteme

Lineare autonome (zeitinvariante) Regelungssysteme:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & t > 0, & & x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}$$

Annahmen:

- n Zustandsvariablen, d.h. $x(t) \in \mathbb{R}^n$;
- m Steuerungsparameter, d.h. $u(t) \in \mathbb{R}^m$;
- p Ausgänge, d.h. $y(t) \in \mathbb{R}^p$;
- A stabil, d.h. $\lambda(A) \subset \mathbb{C}^- \Rightarrow$ System ist stabil.

Zugehörige Transferfunktion:

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D \equiv \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right].$$

Realisierungen

Laplace-Transformation des autonomen Systems:

$$\begin{aligned} sx(s) - x(0) &= Ax(s) + Bu(s), \\ y(s) &= Cx(s) + Du(s). \end{aligned}$$

Sei $x(0) = 0 \implies$

$$y(s) = (C(sI_n - A)^{-1}B + D)u(s) = G(s)u(s).$$

(A, B, C, D) heißt **Realisierung** des Systems G , nicht eindeutig! (m, p festgelegt, n ist variabel!)

Minimale Realisierung: n minimal, d.h. finde minimale Dimension \hat{n} und Matrizen $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$, so daß

$$G(s) = \hat{C}(sI_{\hat{n}} - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D},$$

\hat{n} heißt **McMillan Grad** des Systems.

Minimale Realisierung ist nicht eindeutig: Für jede **Zustandsraumtransformation** ($T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär)

$$\mathcal{T} : \begin{cases} x & \rightarrow Tx \\ (A, B, C, D) & \rightarrow (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D) \end{cases}$$

erhalte neue Realisierung des Systems:

$$D + (CT^{-1})(sI - TAT^{-1})^{-1}(TB) = G(s).$$

Balancierte Realisierung

- Steuerbarkeits-, Beobachtbarkeits-Gram'sche Matrizen von G lösen die Lyapunovgleichungen

$$\begin{aligned} AP + PA^T + BB^T &= 0, \\ A^T Q + QA + C^T C &= 0. \end{aligned}$$

- (A, B, C, D) ist eine balancierte Realisierung des Systems G falls

$$P = Q = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix}.$$

- $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ sind die Hankel-Singulärwerte (HSV) des Systems.
- (A, B, C, D) minimal \implies Zustandsraumtransformation auf balancierte Realisierung existiert.

(A, B, C, D) nicht-minimal \implies

$$P(1 : \hat{n}, 1 : \hat{n}) = Q(1 : \hat{n}, 1 : \hat{n}) = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\hat{n}}),$$

HSV sind $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{\hat{n}}, 0, \dots, 0\}$.

Hankel-Singulärwerte (HSV)

HSV sind Systeminvarianten:

$$(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D) = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{A}\hat{P} + \hat{P}\hat{A}^T + \hat{B}\hat{B}^T \\ &= TAT^{-1}\hat{P} + \hat{P}T^{-T}A^TT^T + TB B^T T^T \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = A(T^{-1}\hat{P}T^{-T}) + (T^{-1}\hat{P}T^{-T})A^T + BB^T$$

Eindeutigkeit der Lösung der Lyapunovgleichung

$$\Downarrow$$

$$\hat{P} = TP T^T, \quad \hat{Q} = T^{-T}QT^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{P}\hat{Q} = TPQT^{-1}.$$

$$\implies \lambda(\hat{P}\hat{Q}) = \lambda(PQ) = \{\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2\}.$$

HSV messen die im System enthaltene "Energie":

- Minimale Energiezufuhr um x_0 zu erreichen:

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \\ x(0) = x_0}} \int_{-\infty}^0 u(t)^T u(t) dt = x_0^T P^{-1} x_0 = \hat{x}_0^T \hat{P}^{-1} \hat{x}_0$$

mit $\hat{x}_0 = T x_0$.

- Ausgangsenergie resultierend aus Anfangszustand x_0 und $u(t) \equiv 0$ für $t > 0$:

$$\|y\|_2^2 = \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt = x_0^T Q x_0 = \hat{x}_0^T \hat{Q} \hat{x}_0.$$

- Energietransfer von vergangenen Eingangssignalen zu zukünftigen Ausgangssignalen:

$$E := \sup_{\substack{u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \\ x(0) = x_0}} \frac{\|y\|_2^2}{\int_{-\infty}^0 u(t)^T u(t) dt} = \frac{\bar{x}_0^T P^{\frac{1}{2}} Q P^{\frac{1}{2}} \bar{x}_0}{\bar{x}_0^T \bar{x}_0}$$

mit $\bar{x}_0 := P^{-\frac{1}{2}} x_0$.

\implies HSV = $(\lambda(PQ))^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda(P^{\frac{1}{2}}QP^{\frac{1}{2}})\right)^{\frac{1}{2}}$ sind ein Maß für den Energietransfer von Eingängen zu Ausgängen.

Die Hardyräume $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

G sei $p \times m$ Transferfunktion. Dann $G \in \mathcal{H}_\infty \iff$

- G analytisch und beschränkt in \mathbb{C}^+ .
- $\|G\|_\infty < \infty$ für $\|G\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(G(i\omega))$.

Bemerkungen:

- $\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{L}_\infty$, abgeschlossen.
- System G stabil $\iff G(s) \in \mathcal{H}_\infty$.
- G rational:
 $G(s) \in \mathcal{H}_\infty \iff G$ hat keine Pole in $\mathbb{C}^+ \cup i\mathbb{R}$.

Betrachte hier Signale aus

$$\mathcal{H}_2 = \{f \text{ meßbar} \mid f \text{ analytisch in } \mathbb{C}^+, \|f\|_2 < \infty\} \subset \mathcal{L}_2.$$

$$G \in \mathcal{H}_\infty, w \in \mathcal{H}_2 \implies z = Gw \in \mathcal{H}_2:$$

$$\|z\|_2 = \|Gw\|_2 \leq \|G\|_\infty \|w\|_2$$

Paley-Wiener Theorem:

$$\mathcal{H}_2 \cong \mathcal{L}_2[0, \infty)$$

Modellreduktion

Wozu?

- Echtzeitregelung nur bei niedriger Komplexität des Reglers möglich.

Feedback-Regler: Lineares System der Ordnung N mit

- Eingang = Ausgang des zu regelnden Systems,
- Ausgang = Steuerungsparameter für zu regelndes System

Moderner Reglerentwurf (\mathcal{H}_2 -/ \mathcal{H}_∞ -Regler): $N \geq n$.

⇒ Ordnung muß reduziert werden!

- “Je komplexer der Regler, desto störungsanfälliger.”
- Wiederholte Simulation mit dem selben Modell für viele verschiedene Eingangssignale:
 - VLSI Chip Design; Verifikation von Layouts von immer komplexeren Schaltkreisen in immer kürzer werdenden Entwicklungszyklen.
 - Simulation von gekoppelten PDE Systemen, z.B. Beeinflußung von Strömungen um komplexe geometrische Objekte.

Modellreduktion basierend auf Betrachtung der absoluten Fehler

Gesucht: **reduziertes Modell**

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t), & k = 0, 1, 2, \dots, \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}\tilde{u}(t),\end{aligned}$$

der Ordnung $\ell \ll n$ mit $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ mit
"kleinem" **absoluten Fehler**

$$\|G - \tilde{G}\|_\infty.$$

$$y(s) = G(s)u(s), \quad \tilde{y}(s) = \tilde{G}(s)u(s) \implies$$

$$\|G(s) - \tilde{G}(s)\|_\infty = \sup_{u \in \mathcal{L}_2} \frac{\|(G - \tilde{G})u\|_2}{\|u\|_2} = \sup_{u \in \mathcal{L}_2} \frac{\|y - \tilde{y}\|_2}{\|u\|_2}$$

\implies Entferne die Zustandsraumkomponenten, die am wenigsten in den Energietransfer von u nach y involviert sind, d.h. die zu den kleinsten HSV gehörenden Komponenten.

Balanciertes Abschneiden

- Zustandsraumtransformation mit $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$$

$$TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CT^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}.$$

Partitioniere

$$T = \begin{bmatrix} T_l \\ W_l \end{bmatrix}, \quad T_l \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} T_r & W_r \end{bmatrix}, \quad T_r \in \mathbb{R}^{n \times \ell}.$$

- Modellreduktion durch Abschneiden:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A_{11} = T_l A T_r \\ \tilde{B} &= B_1 = T_l B, \\ \tilde{C} &= C_1 = C T_r. \\ \tilde{D} &= D. \end{aligned}$$

Beachte: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} (G(i\omega) - \tilde{G}(i\omega)) = D - D = 0$.

- Wahl von T , ℓ so, daß $\|G - \tilde{G}\|_{\infty}$ "klein"!

- Für balancierte Realisierung

$$G(s) \equiv \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad \text{mit} \quad P = Q =: \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix}$$

ist das reduzierte Modell

$$\tilde{G}(s) \equiv \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$$

balanciert, minimal, stabil mit Gram'schen Matrizen

$$\tilde{P} = \tilde{Q} = \tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_\ell \end{bmatrix}$$

⇒ berechenbare Fehlerabschätzung

$$\|G - \tilde{G}\|_\infty \leq 2 \sum_{k=\ell+1}^n \sigma_k.$$

⇒ adaptive Wahl von ℓ

- Transformation auf balancierte Realisierung ist oft schlecht konditioniert. Man kann T_l, T_r so berechnen, daß \tilde{G} nicht balanciert ist, aber die Fehlerabschätzung gilt! [Safonov/Chiang 1989, Varga 1991]

Balanciertes Abschneiden: SR Methode

[Tombs/Postlethwaite 1987]

Gram'sche Matrizen sind positiv semidefinit \implies

$$P = S^T S, \quad Q = R^T R.$$

Numerisch robuster: Verwende S, R statt P, Q :

$$\sigma(SR^T)^2 = \lambda(PQ), \quad \text{cond}(SR^T) = \sqrt{\text{cond}(PQ)}.$$

Beachte:

$$\begin{aligned} S^{-T}(PQ)S^T &= (SR^T)(SR^T)^T \\ &= (U\Sigma V^T)(V\Sigma U^T) = U\Sigma^2 U^T \end{aligned}$$

Berechne balancierende Transformation mit SVD:

$$\begin{aligned} SR^T &= [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \\ \Sigma_1 &= \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_\ell^2) \end{aligned}$$



$$T_l = \Sigma_1^{-1/2} V_1^T R, \quad T_r = S^T U_1 \Sigma_1^{-1/2}.$$

Berechnung der Faktoren S, R bei SR Methode

Standardverfahren:

$S, R = \left[\begin{array}{c|c} \triangle & \\ \hline & \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – Choleskyfaktoren von P, Q .

Berechnung mit Verfahren von Hammarling; reduziere A auf Schurform (QR Algorithmus) und löse resultierendes lineares Gleichungssystem mit Rückwärtseinsetzen.

Neue Idee:

$S \in \mathbb{R}^{\text{Rang}(P) \times n}$
 $R \in \mathbb{R}^{\text{Rang}(Q) \times n}$ – Vollrangfaktoren von P, Q .

Vorteile:

- zuverlässiger falls Choleskyfaktoren numerisch singular,
- effizienter falls $\text{Rang}(P), \text{Rang}(Q) \ll n$,
- SVD ist billiger ($\text{Rang}(P), \text{Rang}(Q) \approx n/10 \Rightarrow$ Faktor 1000).

Singulär gestörte Approximation (SPA)

- Balanciertes Abschneiden hat gute Approximationseigenschaften bei hohen Frequenzen:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(G(j\omega) - \tilde{G}(j\omega) \right) = 0$$

da $G(\infty) = D = \tilde{G}(\infty)$, aber Fehler im Gleichgewichtszustand ist

$$G(0) - \tilde{G}(0) = \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B} - CA^{-1}B.$$

- Exakte Wiedergabe des Gleichgewichtszustands und gute Approximationseigenschaften bei niedrigen Frequenzen erhält man mit SPA:

Partitioniere balanciertes System

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \quad C_2].$$

⇒ SPA reduziertes Modell ist

$$\begin{aligned} \tilde{A} &:= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \\ \tilde{B} &:= B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \\ \tilde{C} &:= C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}, \\ \tilde{D} &:= D - C_2A_{22}^{-1}B_2. \end{aligned}$$

Berechnung des reduzierten Modells mit SPA

1. Berechne minimale Realisierung mit Hilfe der SR oder BFSR Methode.

Benötige Gram'sche Matrizen, SVD, etc.!

2. Teile minimale Realisierung bei Dimension ℓ auf.
3. Wende SPA Formeln auf partitionierte minimale Realisierung an.

\implies Berechenbare Fehlerabschätzung

$$\|G - \tilde{G}\|_{\infty} \leq 2 \sum_{k=\ell+1}^n \sigma_k$$

gilt.

Die Signumfunktions-Methode

Sei $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\lambda(Z) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ und **Jordan-Normalform**

$$Z = S^{-1} \begin{bmatrix} J^+ & 0 \\ 0 & J^- \end{bmatrix} S,$$

- J^+ = Jordanblöcke für $\lambda(Z) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$,
- J^- = Jordanblöcke für $\lambda(Z) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$,

\implies

$$\operatorname{sign}(Z) = S \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} S^{-1}.$$

$\operatorname{sign}(Z)$ kann mit Hilfe des Newton-Verfahrens, angewandt auf $T^2 = I_n$, berechnet werden:

$$Z_0 \leftarrow Z,$$

$$Z_{j+1} \leftarrow \frac{1}{2} \left(c_j Z_j + \frac{1}{c_j} Z_j^{-1} \right), \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\implies \operatorname{sign}(Z) = \lim_{j \rightarrow \infty} Z_j.$$

($c_j > 0$ ist Skalierungsparameter zur Konvergenzbeschleunigung und zur Minimierung der Rundungsfehler.)

Eigenschaften:

- Bild $\left(\frac{1}{2}(I_n - \text{sign}(Z))\right)$ ist **stabiler Z -invarianter Unterraum**.

Mit QR-Faktorisierung $I_n - \text{sign}(Z) = QR$ gilt:

$$Q^T Z Q = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ 0 & Z_{22} \end{bmatrix}, \quad \lambda(Z_{11}) = \lambda(Z) \cap \mathbb{C}^-.$$

- **Einschränkungen:**
 - Genauigkeitsverlust falls die Iterierten schlecht konditioniert sind.
 - Signumfunktion ist nicht definiert falls Z Eigenwerte auf $i\mathbb{R}$ hat \implies Probleme für Eigenwerte **nahe** der imaginären Achse.
- **Aber:**
 - Invariante Unterräume werden mit Signumfunktionsmethode meist so genau berechnet wie ihre Kondition erlaubt. [Byers/He/Mehrmann 1997]
 - Block-Dreiecksform ist oft besser konditioniert als Berechnung der Schurform. \implies Signumfunktion ist oft genauer als Berechnungen basierend auf QR/QZ Algorithmen.

Lösung von Lyapunovgleichungen mit der Signumfunktionsmethode

Wende Newton-Iteration zur Berechnung der Signumfunktion,

$$Z_0 \leftarrow Z,$$

$$Z_{j+1} \leftarrow \frac{1}{2} \left(c_j Z_j + \frac{1}{c_j} Z_j^{-1} \right), \quad j = 1, 2, \dots$$

an auf die zur Lyapunovgleichung

$$F^T X + X F + E = 0$$

gehörende Matrix $Z := \begin{bmatrix} F & 0 \\ E & -F^T \end{bmatrix}$.

$$F \text{ stabil} \implies \text{sign}(Z) = \lim_{j \rightarrow \infty} Z_j = \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 2X_* & I_n \end{bmatrix}.$$

Newton-Iteration ist äquivalent zu

$$F_0 \leftarrow F, \quad E_0 \leftarrow E,$$

für $j = 0, 1, 2, \dots$

$$F_{j+1} \leftarrow \frac{1}{2c_j} \left(F_j + c_j^2 F_j^{-1} \right),$$

$$E_{j+1} \leftarrow \frac{1}{2c_j} \left(E_j + c_j^2 F_j^{-T} E_j F_j^{-1} \right).$$

$$\implies X_* = \frac{1}{2} \lim_{j \rightarrow \infty} E_j$$

Semidefinite Lyapunovgleichungen

Hier: $E = B^T B$ oder $C^T C$, $F = A^T$ oder A .

A stabil \implies Lösung von

$$A^T Q + Q A + C^T C = 0$$

ist positiv semidefinit $\implies Q = R^T R$.

Für $E_0 = C_0^T C_0 := C^T C$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ erhalte

$$\begin{aligned} E_{j+1} &= \frac{1}{2c_j} (E_j + c_j^2 A_j^{-T} E_j A_j^{-1}) \\ &= \frac{1}{2c_j} \begin{bmatrix} C_j \\ c_j C_j A_j^{-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_j \\ c_j C_j A_j^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

\implies schreibe E_j -Iteration um:

$$C_0 := C, \quad C_{j+1} := \frac{1}{\sqrt{2c_j}} \begin{bmatrix} C_j \\ c_j C_j A_j^{-1} \end{bmatrix}.$$

Problem: $C_j \in \mathbb{R}^{p_j \times n} \implies C_{j+1} \in \mathbb{R}^{2p_j \times n}$, d.h. der benötigte Arbeitsspeicher wird in jeder Iteration verdoppelt.

Zwei Ansätze um benötigten Arbeitsspeicher zu begrenzen.

Berechne Choleskyfaktor R_c von Q

Fordere $p_j \leq n$: Für $j > \log_2(n/p)$ berechne **QR-Faktorisierung**

$$C_j = U_j \begin{bmatrix} \hat{C}_j \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_j = \begin{bmatrix} \nabla \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$$\implies X_j = \hat{C}_j^T \hat{C}_j, \quad R_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{C}_j.$$

Berechne Faktor R_f von Q mit $\text{Rang}(Q)$ Zeilen

In jedem Schritt berechne **QR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung**, d.h.

$$\begin{bmatrix} C_j \\ c_j C_j A_j^{-1} \end{bmatrix} = U_{j+1} \begin{bmatrix} R_{j+1} & T_{j+1} \\ 0 & S_{j+1} \end{bmatrix} \Pi_{j+1},$$

mit

- $R_{j+1} \in \mathbb{R}^{p_{j+1} \times p_{j+1}}$
- $p_{j+1} = \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} C_j \\ c_j C_j A_j^{-1} \end{bmatrix} \right).$

$$C_{j+1} := [R_{j+1} \ T_{j+1}] \Pi_{j+1} \in \mathbb{R}^{p_{j+1} \times n}$$

und

$$R_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{j \rightarrow \infty} C_j.$$

Modellreduktion basierend auf relativen Fehlern

Berechne reduziertes System, so daß der durch

$$\tilde{G}(s) = G(s)(I + \Delta_{\text{rel}}).$$

definierte **relative Fehler** $\|\Delta_{\text{rel}}\|_{\infty}$ “klein” wird.

Falls $p = m$, D regulär:

$$\min_{\text{order}(\tilde{G}) \leq \ell} \|G^{-1}(G - \tilde{G})\|_{\infty}.$$

Balanciertes stochastisches Abschneiden (BST):

- Balanciere Steuerbarkeits-Gram'sche Matrix gegen Beobachtbarkeits-Gram'sche Matrix W eines **Spektralfaktors des Potenzspektrums** $\Phi(s) := G(s)G^T(-s)$.
- W ist Lösung einer algebraischen Riccatigleichung; Berechnung mit Newton-Verfahren.
Newtoniteration: Löse Lyapunovgleichung wie zuvor, erhalte faktorisierte Lösung der Riccatigleichung.
- **Vorteile:**
 - Gleichmäßige Approximation der Transferfunktion über gesamten Frequenzbereich.
 - Erhält andere Systemeigenschaften (minimale Phase, robuste Stabilität).
 - Bessere Eigenschaften hinsichtlich Reglerentwurf.

Modellreduktion für große Systeme

Annahme: $n = \mathcal{O}(10^3)$, $m, p \ll n$.

- Faktorisierungsidee kann verwendet werden, um ähnliche Modellreduktionsverfahren für Systeme mit sparser Zustandsmatrix A zu entwickeln; Lösung der Lyapunovgleichungen mit ADI Iteration.

Balanciertes Abschneiden: [Penzl 1999, Li/White 2001],
BST: [B. 200x]

- Falls A dichtbesetzt: Anwendung der Signumfunktionsbasierten Modellreduktionsverfahren durch
 - Parallelisierung [B., Quintana-Ortí $\times 2$]
 - sparse Repräsentation (Approximation) von A mit **hierarchischen Matrizen**
[Hackbusch, Khoromskij, Grasedyck]
 - Matrixkompression mit Multiskalen-/Wavelet-techniken, formatierte Arithmetik???

Hier: **Parallelisierung**

- Newton-Iteration ist einfach zu parallelisieren – benötige nur elementare lineare Algebra (lineare Gleichungssysteme, Matrixaddition, -produkt).
- Verwende MPI, BLACS, PBLAS und ScaLAPACK (→ portabler Code).
- Tests auf **PC Cluster (Linux)** mit 32 Intel Pentium II-300MHz Prozessoren.
 - Arbeitsspeicher pro Prozessor: 128 MBytes.
 - Myrinet Switch, Bandbreite ≈ 100 Mbit/sec.
- Resultate auf 1 Prozessor: SLICOT Codes, basierend auf Berechnung der Choleskyfaktoren mit dem Verfahren von Hammarling.

SLICOT = Subroutine Library in Control Theory.
<http://www.win.tue.nl/niconet>

Numerische Ergebnisse

Testbeispiele:

1. Wärmeleitungsgleichung mit Punktsteuerung

Beeinflussung der Temperaturverteilung in dünnem Draht mit Wärmequelle in der Mitte und gekühltem Rand \implies 1D Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen, diskretisiert mit FEM, lineare Elemente.

$n =$ Dimension des FE Raums.

$m = 1$ Wärmequelle an einem Punkt angelegt.

$p = 1$ Temperaturmessung an einem Punkt.

2. Simulation eines katalytischen Reaktors (aus *gPROMS* Tutorium)

- FE Diskretisierung eines Randsteuerungsproblems für gekoppeltes PDE System (Bilanzgleichungen, Reaktionsgleichungen, gemischte und Neumann-Randbedingungen), Linearisierung um Arbeitspunkt.
- **Dynamik:** Oxidation (*o*-Xylene nach Anhydrit), Gasphasenreaktion im Reaktor.
- **Steuerung:** Externe Kühlung des Reaktors.
- $n = 1171, m = 6, p = 4$.

3. "Zufällige" Systeme mit vorgegebenem McMillan Grad und vorgegebenem Rang der Gram'schen Matrizen.

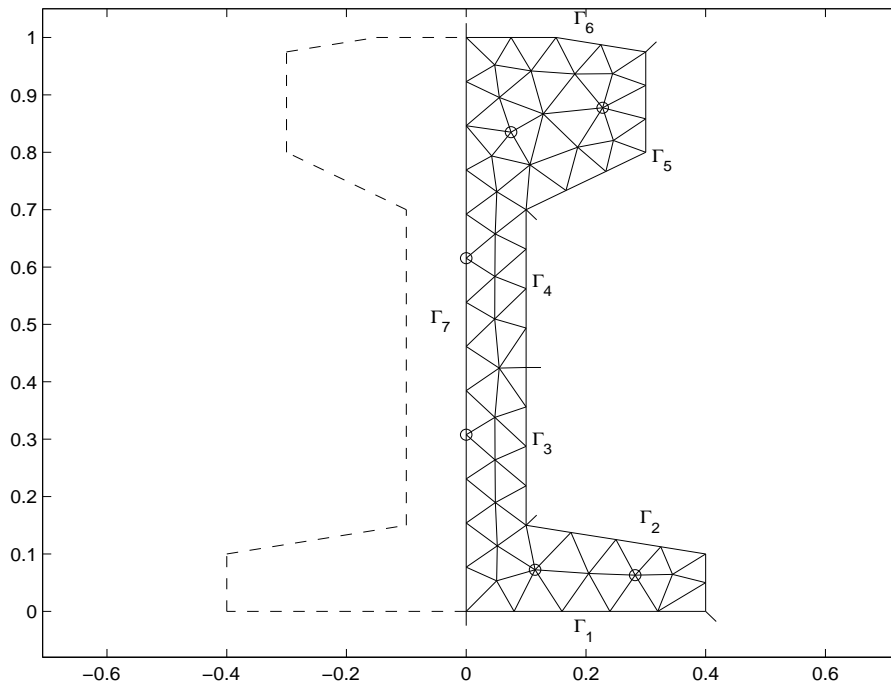
4. Optimale Abkühlung von Stahlprofilen (Modell von Mannesmann/Demag, [Tröltzsch/Unger, Penzl 1999])

- Mathematisches Modell: Randsteuerung für linearisierte 2D Wärmeleitungsgleichung.

$$\begin{aligned} x_t &= \Delta x, & \xi \in \Omega \\ x + x_\nu &= u_k, & \xi \in \Gamma_k, \quad k = 1, \dots, 6, \\ x_\nu &= 0, & \xi \in \Gamma_7. \end{aligned}$$

$$\implies m = p = 6$$

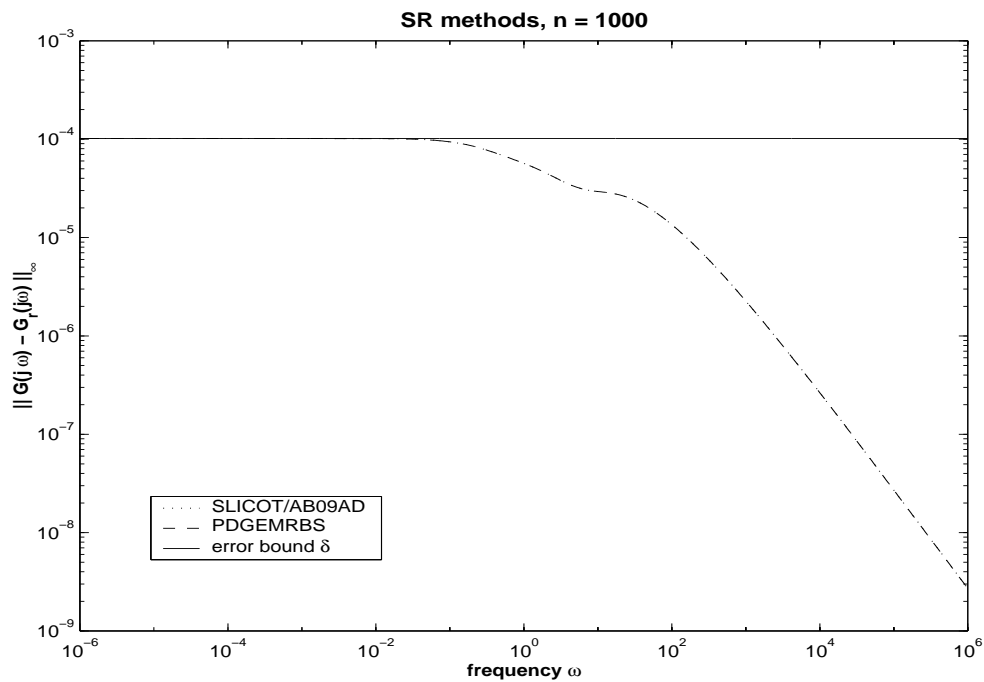
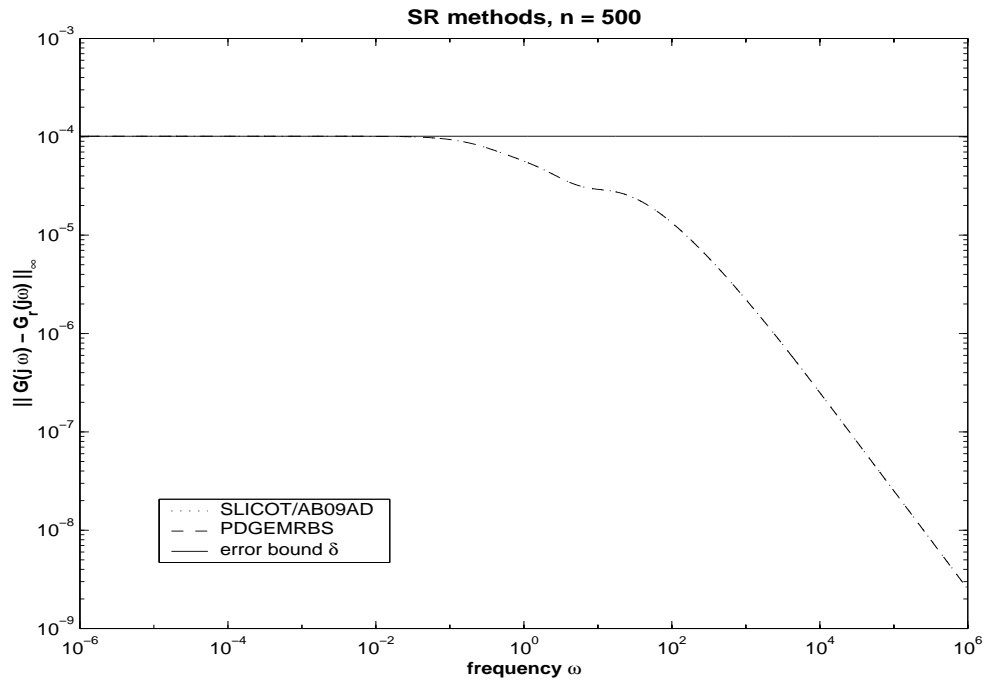
- FEM Diskretisierung, Anfangsvernetzung ($n = 821$).



2 Schritte Gitterverfeinerung $\implies n = 3113$.

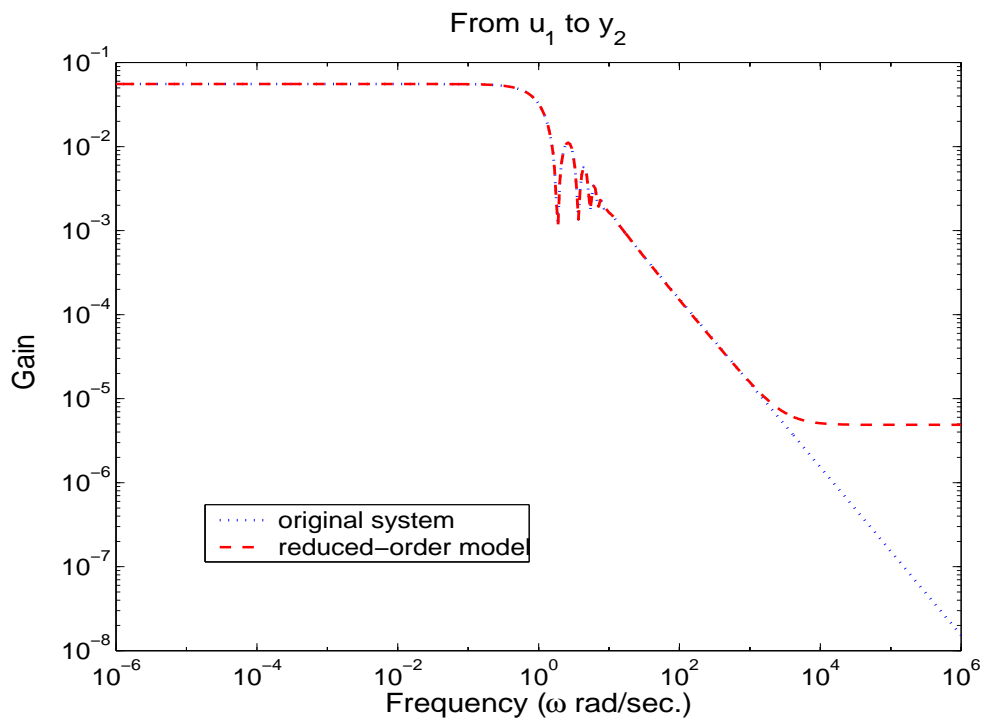
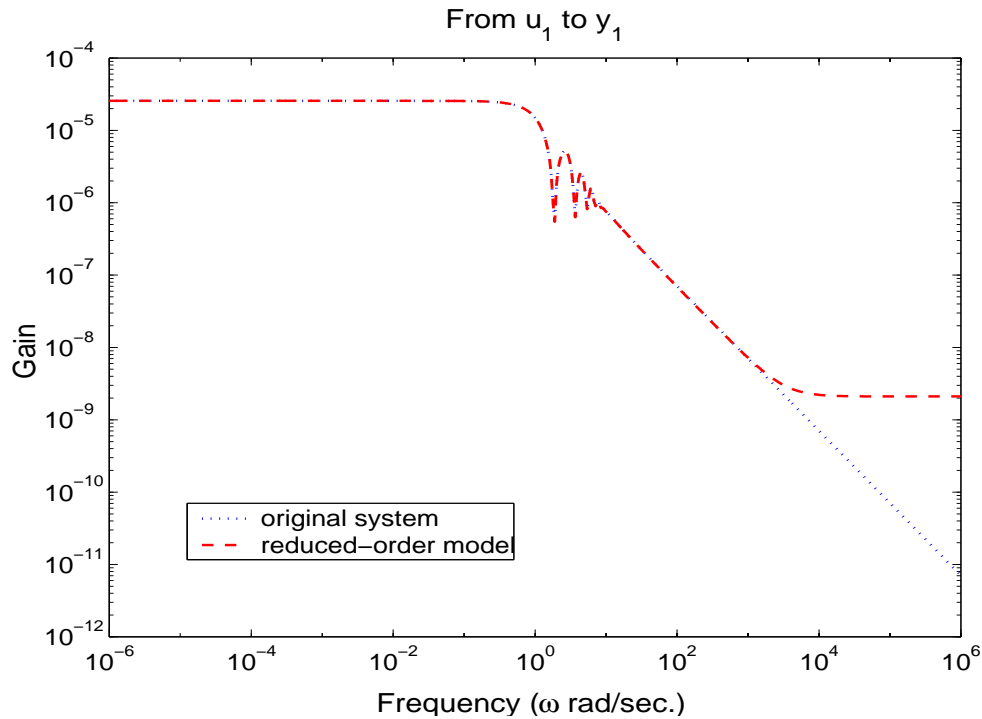
Bode-Diagramm (Frequenzgang, Amplitude) für balanciertes Abschneiden

Beispiel 1: $\text{Rang}(P) = 32$, $\text{Rang}(Q) = 38(37)$, $\ell = 6$



Bode-Diagramm für SPA

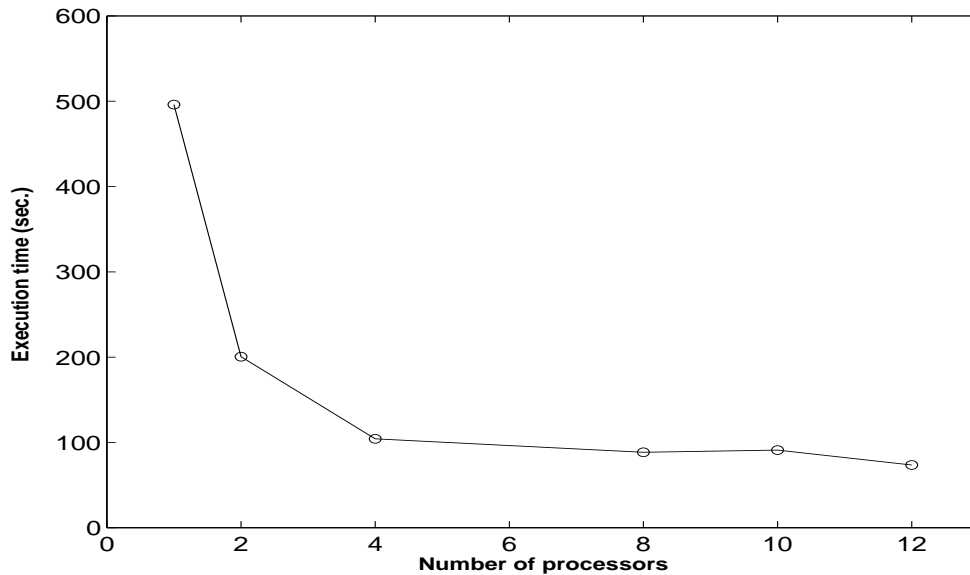
Beispiel 2: $\text{Rang}(P) = 124$, $\text{Rang}(Q) = 93$, $\ell = 40$



Speed-up/Effizienz der parallelen Algorithmen

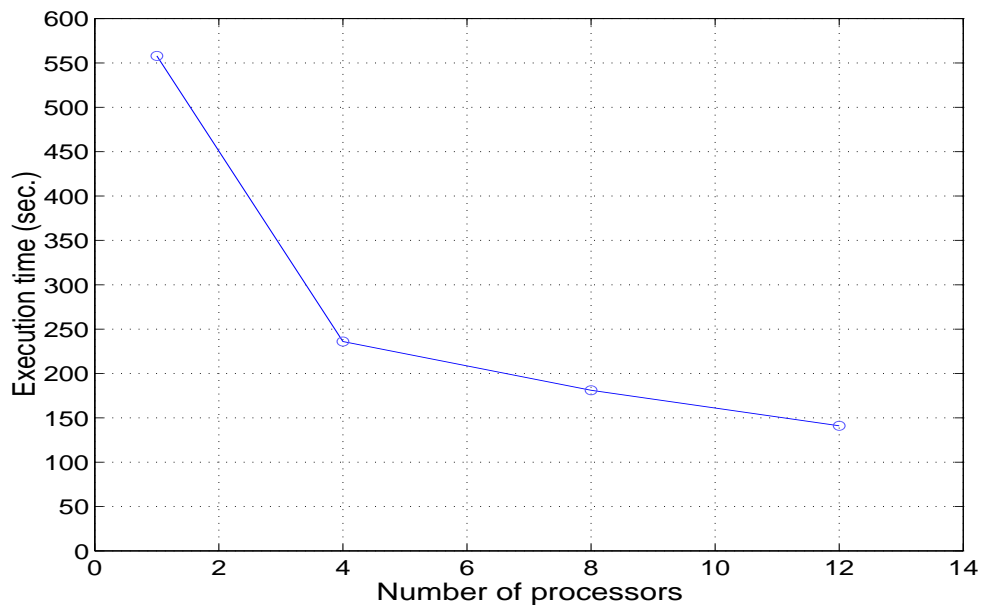
Beispiel 3/balanciertes Abschneiden:

$$n = 1000, m = p = 100, \hat{n} = \ell = 50$$



Beispiel 2/SPA:

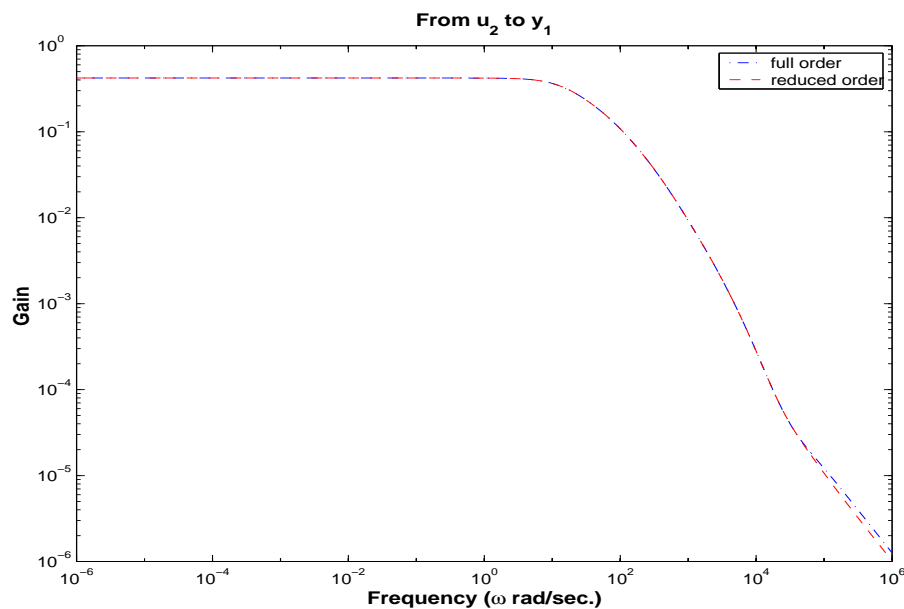
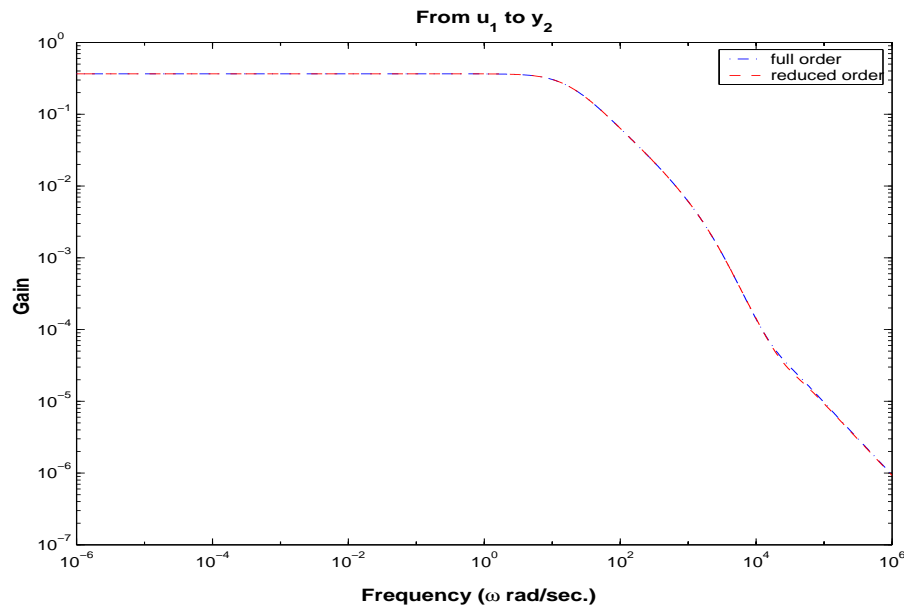
$$n = 1171, m = 6, p = 4, \ell = 40$$



Gleichmäßige Approximation durch BST

Beispiel 4:

- $n = 821$: $\text{Rang}(P) = 165$, $\text{Rang}(Q) = 210$, $\ell = 40$



- $n = 3113$: $\text{Rang}(P) = 178$, $\text{Rang}(Q) = 220$

Ausblick

- Modellreduktion für diskrete Systeme analog; Berechnung der Faktoren der Gram'schen Matrizen mit faktorisierter Smith-Iteration (beschleunigtes Fixpunktverfahren).
- Zusammenfassung der implementierten Methoden in Softwarebibliothek **PLiCMR**, Integration in parallele Version von SLICOT.
- Modellreduktion großer Systeme auf PC Cluster in Castellón: E-mail, Web Server.
- Implementierung der Methoden für sparse Systeme.
- **Schaltkreissimulation:**
 - Berechnung passiver reduzierter Systeme.
 - Übertragung auf DAE Systeme
- Berücksichtigung von PDE Strukturen?