Max-Planck-Institut für
Dynamik komplexer technischer Systeme
Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems

MAX–PLANCK–INSTITUT
FÜR DYNAMIK KOMPLEXER
TECHNISCHER SYSTEME
MAGDEBURG

# Thema für eine Abschlussarbeit

Patrick Kürschner

Computational Methods in
Systems and Control Theory

Telefon: +49 391 6110 424
Fax: +49 391 6110 453

E-Mail:
kuerschner@mpi-magdeburg.mpg.de

www:
http://www.mpi-magdeburg.mpg.de
/mpcsc/kuerschner/

8. Mai 2013

**Fachgruppe Computational Methods in Systems and Control Theory**

**Thema:**

**Studien zur Niedrig-Rang ADI für großskalige Steingleichungen**

**Vorkenntnisse**
Numerik, Numerische Lineare Algebra
(empfohlen)

Mathematische System- und Regelungstheorie, Matrixgleichungen
(wünschenswert)

**Tätigkeitsbeschreibung**
Wir betrachten großskalige verallgemeinerte Steingleichungen (oder zeit-diskrete Lyapunovgleichungen)

$$EXE^T = AXA^T + BB^T \tag{1}$$

mit $E,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $X = X^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die eindeutige Lösung existiert wenn $|\lambda| < 1$ für alle $\lambda \in \Lambda(A, E)$. Steingleichungen spielen eine wichtige Rolle in der mathematischen Regelungstheorie zeit-diskreter dynamischer Systeme. Für große, dünnbesetzte Matrizen $A,\ E$ und $m \ll n$ zeigt sich dass die Singulärwerte von $X$ häufig sehr schnell gegen Null fallen, s.d. $X$ einen sehr niedrigen numerischen Rang hat. Die motiviert die Approximation von $X$ durch Niedrig-Rang-Faktoren $Z \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $r \ll n$, s.d. $X \approx ZZ^T$. Die Niedrig-Rang ADI Iteration in Algorithmus 1 [BenK13] stellt dafür ein geeignetes Verfahren dar und soll in dieser Arbeit näher untersucht werden.

---

**Algorithm 1**: Niedrig-Rang ADI für Steingleichungen (1) [BenK13]

**Input** : $A,\ E,\ B$ wie in (1), Shift Parameter $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_{\max}}\}$ mit $0 < |\alpha_k| < 1$, Toleranz $0 < \tau \ll 1$.
**Output**: $Z_{k_{\max}} \in \mathbb{C}^{n\times rk_{\max}}$ such that $Z_{k_{\max}} Z_{k_{\max}}^H \approx X$.

1 $W_0 = B$, $\theta_0 = 1$, $k = 1$.
2 **while** $|\theta_{k-1}|^2 \|W_{k-1}\|^2 \geq \tau \|B\|^2$ **do**
3 Löse $\left(A - \frac{\alpha_k}{|\alpha_k|^2} E\right) V_k = W_{k-1}$ für $V_k$.
4 $W_k = W_{k-1} + \frac{1-\alpha_k^2}{\alpha_k} EV_k,\ \ \theta_k = \frac{\theta_{k-1}}{\alpha_k^2}$.
5 $Z_k = [Z_{k-1}, \sqrt{(1-|\alpha_k|^2)\theta_k} V_k]$, $k = k + 1$.

---

Die linearen Gleichungssysteme in Schritt 3 können auch geschrieben werden als:

$$\left(|\alpha_k|^2 A - \alpha_k E\right) V_k = W_{k-1} \quad \text{und} \quad (\alpha_k A - E)\, V_k = W_{k-1}$$

was entsprechend veränderte Varianten von Algorithm 1 hervorbringt. Diese Varianten sollen implementiert und bzgl. ihrer numerischen Robustheit untersucht und verglichen werden.

Eine weitere Aufgabe ist die Untersuchung verschiedener Strategien zur Auswahl und Berechnung von geeigneten Shift Parametern $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_{\max}}\}$, welche starken Einfluss auf die Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration haben.

Ein optionales Ziel ist die Einbindung der obigen Niedrig-Rang ADI (und ihrer Varianten) in Newton-Verfahren für zeit-diskrete algebraische Riccatigleichungen [BenF11]

$$AXA^T - EXE^T + BB^T + A^T XC(I_r + C^T XC)^{-1} C^T XA = 0.$$

**Abschluss**
Bachelor oder Praktikum

**Arbeitsbereich**
Matrixgleichungen, Regelungstheorie, Numerische Linear Algebra

**Kontakt**


| | | |
|---|---|---|
| | M.sc. Patrick Kürschner | Prof. Peter Benner |
| Telefon | +49 391 6110 424 | +49 391 6110 450 |
| Email | kuerschner@mpi-magdeburg.mpg.de | benner@mpi-magdeburg.mpg.de |


**Literatur**


**BenK13** P. Benner, P. Kürschner
*Computing Real Low-rank Solutions of Sylvester equations by the Factored ADI Method.*
Max Planck Institute Magdeburg Preprint MPIMD/13-05, 2013.

**BenF11** P. Benner, H. Faßbender
*On the numerical solution of large-scale sparse discrete-time Riccati equations.*
Adv. Comput. Math., 35(2), pp. 119–147, 2011.

**Pen00** T. Penzl
*A cyclic low rank Smith method for large sparse Lyapunov equations.*
SIAM Scientific Computing, 21(4), pp. 1401–1418, 2000.